ANALYSE MULTICRITERE

EXPOSE DE QUELQUES METHODES

(Support théorique au logiciel «LINAM»)

Prof. Dr Ph. WIESER, EPFL/CDM-LEM-IML

2008

Table des matières

GENERALITE: DONNEES DE BASE

Données de base communes à toutes les méthodes d'analyse multicritère exposées dans ce document:

- Définition des variantes
- Définition des critères (indépendants): unité, échelle, pondération, *critère à maximiser ou à minimiser*
- Valorisation de chaque variante par rapport à l'ensemble des critères

	CRITERES					
	K_1 min/max	**K_2** min/max	**K_3** min/max	**K_4** min/max	**…** ...	**K_m** min/max
VARIANTES	**MATRICE DES COEFFICIENTS** (V_i,K_j)					
V_1						
V_2						
V_3				**(V_3,K_4)**		
V_4						
…						
V_n						
Pondération	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**…**	**P_m**

1. MOYENNES ORDINALES PONDEREES

Méthode de **classement** prenant en compte exclusivement la notion de dominance «moyenne» d'une variante i sur une variante j (concordance au sens des méthodes ELECTRE I & II, sans considération de discordance!). Un classement de variante (ordre) est effectué sur chaque critère (affectation d'une note associée au classement ordinal). L'ensemble de ces classements partiels par critère sont ensuite sommés (éventuellement calcul d'une moyenne); cette somme servant à établir le classement final des variantes.

Ces méthodes présentent, en général, un certain nombre d'inconvénients ou de biais par rapport à la réalité du fait que les critères, en terme d'unités ou d'échelles, sont transformés ou adaptés avant toute application de méthodes. (Par exemple: méthodes des moyennes, **transformation** de l'unité et de l'échelle de chaque critère le rendant compatible à un standard commun à tous critères pour pouvoir effectuer des calculs de sommes et de moyennes!).

2. ELECTRE I (selon B.ROY)

ELECTRE = **EL**imination **E**t **C**hoix **T**raduisant la **RE**alité

2.1 INTRODUCTION

Méthode de **partition** de variantes, c'est-à-dire qu'un certain nombre de variantes seront retenues (NOYAU du système) au profit d'autres, surclassées par les variantes du noyau.
L'originalité de cette méthode réside sur le fait qu'elle est, d'une part parfaitement rigoureuse mathématiquement (à l'instar de méthodes par moyennes ou de certaines méthodes de classement) et d'autre part elle conserve pratiquement jusqu'au résultat final tous les attributs propres à chaque critère (unité, échelle).

ELECTRE est basée sur deux conditions distinctes à satisfaire simultanément.
Ainsi, il est possible d'affirmer que la variante i surclasse la variante j si:

A. $i \geq j$ sur une majorité de critère: condition de **CONCORDANCE**,
ET
B. que la variante j ne domine pas «trop fortement» i sur un critère particulier: condition de **DISCORDANCE**.

Ces deux conditions doivent être satisfaites pour pouvoir affirmer que la variante i domine la variante j.

Trois cas peuvent alors se présenter:

$i \rightarrow j$, soit i domine j
$j \rightarrow i$, soit j domine i
i ? j , soit incomparabilité entre i & j

Un quatrième cas peut encore apparaître: $i \leftrightarrow j$, soit un circuit entre i & j. Ce cas sera discuté ultérieurement.

2.2 CONCORDANCE

La concordance (tout comme d'ailleurs la discordance) s'exprime par une matrice carrée (variantes,variantes). Cette dernière s'obtient en comparant , pour chaque critère, tous couples de variantes (i,j), en testant si $i \geq j$. Le résultat est exprimé par un indice booléen [0,1] ($i \geq j \Rightarrow 1$, sinon $\Rightarrow 0$).

Exemple: il est cherché, pour les 6 critères ci-après, la dominance en concordance de: i→j.

Tableau 1

	Critères						
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
Variante i	4	12	7	9	2	20	
Variante j	3	20	7	5	1	30	
(a) i ≥ j ?	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	*vecteur booléen*
(b) Pondération	2	1	1	1	3	2	**Σ = 10**
(a) x (b)	**2**	**0**	**1**	**1**	**3**	**0**	**Σ = 7**

L'indice de concordance i→j, s'obtient finalement en normant cette dernière valeur (Σ=7) par rapport à la somme des poids (Σ=10).

Soit: **C(i→j) = C(i,j) = 7/10 = 0.7**

C'est-à-dire que l'affirmation i→j est vraie dans 70% des cas compte tenu de la pondération des critères.

Matrice (carrée: variantes-variantes) de concordance: **C(i,j)**

	Var. j
Variante i	**0.7**

2.3 DISCORDANCE

Rappel: il est cherché s'il est possible d'affirmer que i→j.

Il s'agit alors de déterminer quels sont les critères qui infirment ce postulat (c.f. B, § 2.1); dans l'exemple ci-avant (tableau 1), les critères 2 & 6.

La discordance exprime l'intensité du désaccord maximum, indépendamment de la pondération des critères.

Ainsi:

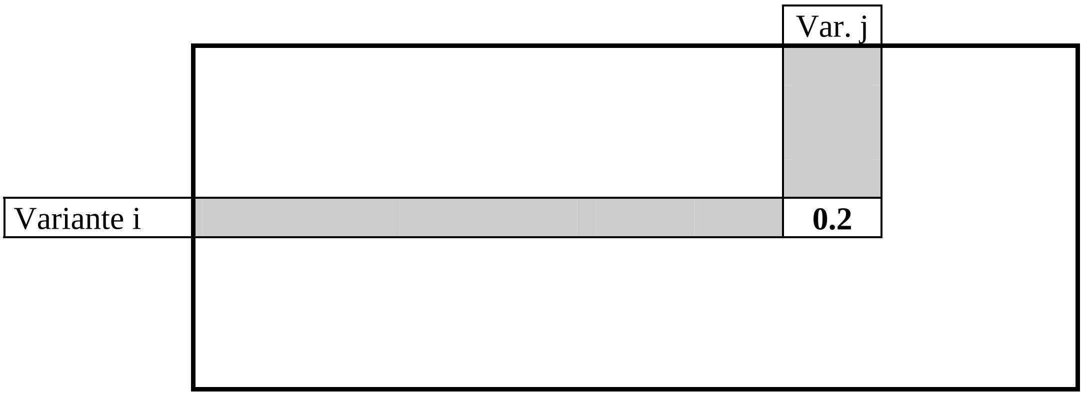
D(i→j)[2] = 20 - 12 = 8	(discordance associée au critère 2)
D(i→j)[6] = 30 - 20 = 10	(discordance associée au critère 6)
Discordance maximum: D(i→j)[6] = 10	

Cette valeur est ensuite normée (cohérence avec l'indice de concordance) par rapport à la discordance potentielle maximum, tous critères confondus, c'est-à-dire par rapport à l'échelle maximale sur l'ensemble des critères.

En supposant dans cet exemple une échelle maximale (tous critères confondus) de 50, la valeur normée de la discordance maximum associée au critère 6 est alors:

$\mathbf{\overline{D}_{max}(i \rightarrow j) = D(i,j) = D(i \rightarrow j)[6]/50 = 10/50 = 0.2}$

Matrice (carrée: variantes-variantes) de discordance maximum normée: **D(i,j)**



Cette technique pour normer les indices de discordance a été établie par M. B. Roy, concepteur de la méthode. Toutefois, si les échelles des critères sont très disparates, il peut arriver que certains indices de discordance soient biaisés.
En effet, en supposant que, dans l'exemple ci-dessus, les échelles soient respectivement de 20 sur le critère 2 et de 50 sur le critère 6:

$D(i \rightarrow j)[2] = 8 \quad \Rightarrow \overline{D}(i \rightarrow j)[2] = 8/20 \quad = 0.4$
$D(i \rightarrow j)[6] = 10 \quad \Rightarrow \overline{D}(i \rightarrow j)[6] = 10/50 \quad = 0.2$

Le maximum de discordance en valeur normée est ainsi de 0.4 pour le critère 2.

Pour cette raison le logiciel «LINAM» permet le choix de la technique de calcul de la valeur normée de l'indice de discordance:
- /max de l'échelle tous critères confondus (méthode B. Roy),
- /échelle du critère discordant (c.f. remarque ci-dessus).

(Pour parer à ce biais, en appliquant la 1ère technique de calcul de l'indice normé de discordance, il serait également possible de calibrer le seuil de discordance défini ci-après ou d'ajuster en puissance de 10, par exemple, l'échelle de certains critères).

Remarque: à ce stade du calcul, aucune modification de données initiales (pondération, unités et échelles des critères, matrice d'états, ...) n'a été faite. Les données de base sont ainsi conservées en leur état brut pratiquement jusqu'au résultat final, ce qui constitue une des caractéristiques intéressantes de cette méthode.

2.4 GRAPHE DE SURCLASSEMENT, PARTITION DE VARIANTES

Il s'agit dès lors, en fonction des deux matrices de concordance et discordance, de vérifier si le postulat émis précédemment: **i→j** est acceptable.
Pour ce faire, il est défini deux seuils $\mathbf{S_C}$ et $\mathbf{S_D}$, respectivement seuil de concordance et seuil de discordance (variables exogènes du système: $0 \leq [S_C, S_D] \leq 1$)

Ainsi, pour affirmer que: i→j, il faut **simultanément** que:

$\boxed{\mathbf{C}(i,j) \geq \mathbf{S_C} \ \ \mathbf{ET} \ \ \mathbf{D}(i,j) \leq \mathbf{S_D}}$

En reprenant l'exemple précédent et en posant: S_C =1 & S_D =0 (seul cas où il y a complémentarité à 1 entre S_C & S_D), alors: i ? j, soit incomparabilité entre i & j.

Si: S_C =0.7 & S_D =0.2, alors: i→j, soit dominance de i sur j.

Il est alors possible, en fonction de S_C & S_D (ajustement par essais successifs), de construire le graphe de surclassement (partiel) de l'ensemble des variantes.

La FIGURE 2.1 présente un tel graphe (5 variantes) où les surclassements de variantes, obtenus après «sélection» des indices de concordance et discordance, en fonction des seuils S_C & S_D, sont:

Matrice de surclassement

1 → 2	2 1	3 1	4 1	5 1
1 3	**2 → 3**	3 2	4 2	5 2
1 → 4	2 4	3 4	4 3	5 3
1 5	2 5	3 5	4 5	5 4

Remarque: chaque graphe est ainsi lié aux seuils de concordance et de discordance, c'est-à-dire à la crédibilité des exigences retenues pour ces seuils S_C (concordance) & S_D (discordance).

Les variantes retenues (variantes du noyau N) sont celles qui, dans un premier temps, ne sont surclassées par aucune autre (c.f. Figure 2.1): soit 1 & 5, **N{1,5}**

Si la variante 1 fait partie du noyau, il est alors possible d'éliminer les variantes 2 & 4 qui sont surclassées par cette variante 1. Il subsiste finalement la variante 3 (Figure 2.2), qui n'est surclassée par aucune des variantes du noyau initial, est qui doit donc être intégrée au noyau final:

N{1,5,3}

ELECTRE I: graphe de surclassements

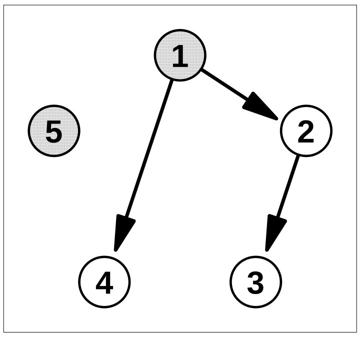


Figure 2.1

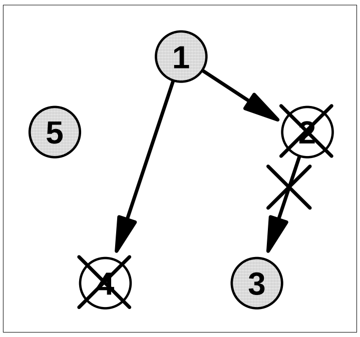
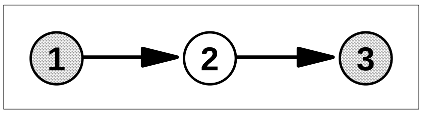


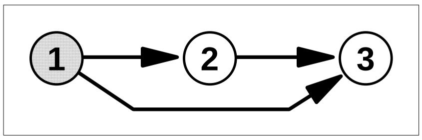
Figure 2.2

Ce fait (Figure 2.2) peut paraître paradoxal, il est au contraire parfaitement logique et mathématiquement rigoureux.
En effet, cette méthode repose sur une notion de non transitivité (automatique).

Soit l'exemple simple de graphe de surclassement suivant:

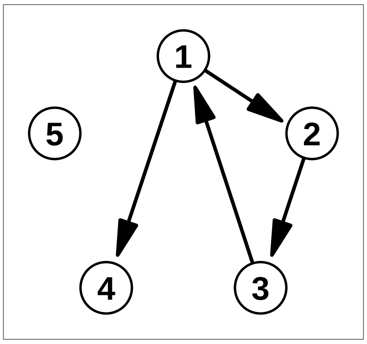


Dans cet exemple, les variantes du noyau sont N{1,3}, c'est-à-dire qu'aucun bouclement transitif n'est forcé; les raisons qui font que $1 \rightarrow 2$ sont différentes de celles qui font que $2 \rightarrow 3$ ($\Rightarrow$ analyse multicritère), il n'est alors pas possible d'affirmer que $1 \rightarrow 3$ (ce qui serait le cas en approche monocritère!).
Pour que la variante 1 soit seule dans le noyau, il faudrait explicitement que $1 \rightarrow 3$, c.f. graphe ci-dessous.



CIRCUITS: en fonction des seuils choisis (en particulier pour des exigences faibles), il peut arriver qu'il y ait des circuits (c.f. Figure 2.3). Ce fait n'est pas absurde en fonction de ce qui a été décrit ci-dessus sur la notion de non transitivité (les circuits sont détectés par le logiciel «LINAM»). L'interprétation de tels graphes (détermination de quasi-noyaux) sortirait du cadre de ce descriptif.

ELECTRE I: graphe de surclassements, circuits



3. ELECTRE II (selon B.ROY)

3.1 INTRODUCTION

Méthode de **classement** de variantes fondée sur les mêmes concepts de base que ELECTRE I, c'est-à-dire: CONCORDANCE & DISCORDANCE.
La notion de concordance dans ELECTRE II est quasi-identique à celle décrite dans le cadre de ELECTRE I, par contre l'approche en discordance est sensiblement différente et à pour conséquence de se libérer des échelles associées à chaque critère.
Cette démarche plus fine (nécessitant par contre un certain nombre d'informations complémentaires) conduit à une comparaison de surclassements de variantes plus riche que dans ELECTRE I.
Ainsi, les cinq cas suivants de surclassement de variantes peuvent se présenter:

i ➔ j	⇒	dominance Forte de i sur j
i → j	⇒	dominance faible de i sur j
j ➔ i	⇒	dominance Forte de j sur i
j → i	⇒	dominance faible de j sur i
i ? j	⇒	incomparabilité entre i & j

Occasionnellement, selon les seuils choisis par le décideur, des circuits (Forts ou faibles) sont susceptibles d'apparaître sur le graphe de surclassements. Ces cas seront abordés ultérieurement.

3.2 PRINCIPE DE LA METHODE

Comme pour ELECTRE I, la variante i domine la variante j si:

A. la **concordance** est «suffisamment élevée»,
ET
B. la **discordance** «pas trop importante».

L'interprétation de «suffisamment élevée» et de «pas trop importante» conduira à la notion de surclassements Forts et faibles.

Une condition supplémentaire vient s'ajouter à ces deux exigences:

$$\boxed{\frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1}$$

Cette condition exprime que le nombre pondéré de critères pour lesquels i→j [**P(i,j)+**] doivent être ≥ au nombre pondéré de critères pour lesquels j→i [**P(i,j)-**].
(Distinction des valeurs égalitaires).

3.3 CONCORDANCE

Le calcul des indices de concordance C(i,j) est identique à celui d'ELECTRE I, par contre, il est défini, dans ELECTRE II, trois seuils distincts de concordance: $\mathbf{S}_{C1}$, $\mathbf{S}_{C2}$ & $\mathbf{S}_{C3}$, d'exigences décroissantes:

$$1 \geq \mathbf{S}_{C1} \geq \mathbf{S}_{C2} \geq \mathbf{S}_{C3} > 0$$

3.4 DISCORDANCE

Une des caractéristiques d'ELECTRE II par rapport à ELECTRE I est d'éviter le recours aux échelles des critères pour le calcul de la discordance (ces échelles, associées à chaque critère, utilisées dans le calcul de la valeur normée de l'indice de discordance pouvant induire certains biais logiques, comme il en a été fait mention dans l'exposé de la méthode ELECTRE I).

Deux seuils de discordance, **par critère**, sont ainsi définis dans ELECTRE II; soit pour le critère k: $\mathbf{S}_{D1}$[k] & $\mathbf{S}_{D2}$[k], avec comme condition:

$$\text{Echelle max}[k] > \mathbf{S}_{D2}[k] > \mathbf{S}_{D1}[k] > 0$$

Il s'agit alors de comparer, pour chaque critère discordant (relativement au postulat $i \rightarrow j$), sa discordance absolue par rapport au couple de seuils S_{D1} & S_{D2} de ce critère.

3.5 SURCLASSEMENTS

Sur la base des indices normés de concordance et de la discordance absolue (critères discordants), et de leurs seuils associés, il est défini que:

A. i surclasse Fortement j (i ➔ j), si:

$\frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1$ **et** $C(i,j) \geq S_{C1}$ **et** $D(i,j)[k] \leq S_{D2}[k]$	$\Leftarrow$ **OU** $\Rightarrow$ pour tous critères [k] discordants	$\frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1$ **et** $C(i,j) \geq S_{C2}$ **et** $D(i,j)[k] \leq S_{D1}[k]$

B. i surclasse faiblement j (i → j), si:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{P(i,j)+}{P(i,j)-} \geq 1 \\ \textbf{et} \\ C(i,j) \geq S_{C3} \\ \textbf{et} \\ D(i,j)[k] \leq S_{D2}[k] \end{array}}$$

pour tous critères [k] discordants

C. autres cas: incomparabilité entre i & j (i ? j)

Ces conditions peuvent être résumées dans le tableau ci-dessous:
F ⇒ surclassement Fort: i ➔ j
f ⇒ surclassement faible: i → j
? ⇒ incomparabilité: i ? j

		Concordance			
	1 ↘	S_{C1} ↘	S_{C2} ↘	S_{C3} ↘	0 ↘
Discordance	0 ↗	**F**	**F**	f	?
	S_{D1} ↗	**F**	f	f	?
	S_{D2} ↗	?	?	?	?
	Ech. Max ↗				

En reprenant l'exemple précédent (ELECTRE I, § 2.2 & 2.3): i→j

C(i,j) = 0.7 D(i,j)[2] = 8 D(i,j)[6] = 10	et avec	S_{C1}=0.8 S_{D1}[2]=6 S_{D1}[6]=15	S_{C2}=0.6 S_{D2}[2]=12 S_{D2}[6]=20	S_{C3}=0.5

ainsi:

$$\frac{P(i,j)+}{P(i,j)-} = \frac{6}{3} = 2 \geq 1$$

$$S_{C1} > C(i,j) > S_{C2}$$

[1] $S_{D1}[2] < D(i,j)[2] < S_{D2}[2]$

$D(i,j)[6] < S_{D1}[6]$

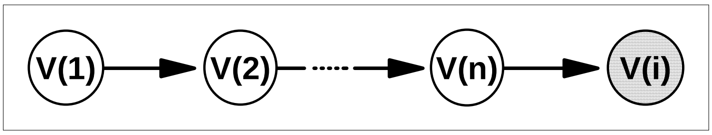
[1] cas le plus défavorable ⇒ surclassement faible: i→j
si par contre: S_{D1}[2] = 9⇒ surclassement Fort : i➔j

Effectué pour tous couples de variantes (i,j) prises deux à deux, la démarche exposée ci-dessus permet de construire le graphe (partiel) de surclassements (Figure 3.1):
- surclassements Forts: ————————
- surclassements faibles: – – – – –

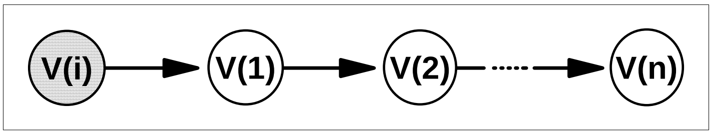
3.6 CLASSEMENTS DE VARIANTES

Les classements de variantes sont établis en fonction des longueurs de chemins incidents à une variante (à minimiser) et issus d'une variante (à maximiser).

- **Chemin incident à V(i) = ensemble des sommets V(1), V(2), ... V(n):**



- **Chemin issu de V(i) = ensemble des sommets V(1), V(2), ... V(n):**



Longueur d'un chemin incident ou issu = nombre de sommets j(k)

De façon générale, les classements sont effectués sur la base des relations de surclassements Forts, les surclassements faibles étant pris en compte pour départager les variantes ex aequo à l'intérieur d'une classe.

A. Classement DIRECT

Intuitivement le plus logique à définir, ce classement est fondé sur la notion de longueur des chemins incidents. Un sommet est ainsi d'autant mieux classé que la longueur du chemin qui y aboutit est petit (minimisation de l'«implosion»).

Ainsi, sur la base du graphe de la Figure 3.1, en ne considérant que les surclassements Forts (Figure 3.2 a):

Classement DIRECT (surclassements Forts)

1 **5**	**2** **4**	**3**

(les variantes 1 & 5 n'étant surclassées par aucune autre variante ⇒ 1ère place, puis à égalité à la 2ème place, les variantes 2 & 4, et finalement la variante 3).

En introduisant maintenant les surclassements faibles (Figure 3.2 b) pour départager les variantes ex aequo (à l’intérieur d’une classe):

Classement DIRECT final

1	**5**	**4**	**2**	**3**

ELECTRE II: graphe de surclassements Forts et faibles

Classement direct

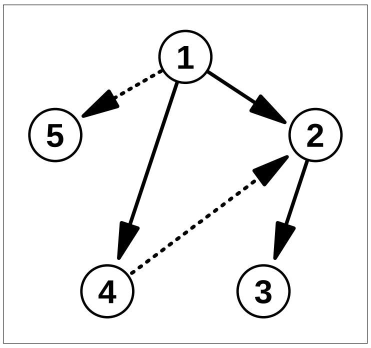


Figure 3.1

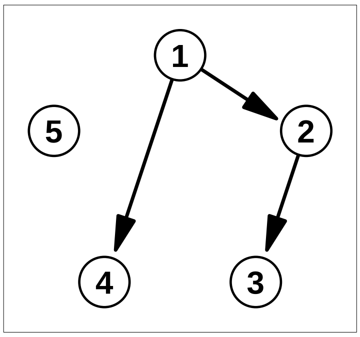


Figure 3.2a

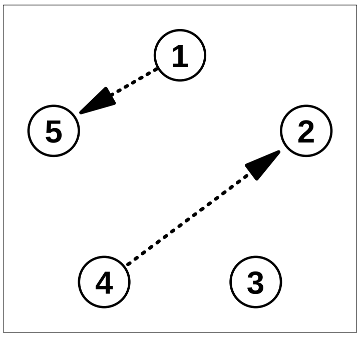


Figure 3.2b

B. Classement INVERSE

Ce classement est fondé sur la notion de longueur des chemins issus. Un sommet est ainsi d'autant mieux classé que la longueur du chemin qui y est issu est grand (maximisation de l'«explosion»).
Il est alors possible de conserver la même logique de calcul que celle appliquée au classement direct. Pour cela, il suffit d'inverser le sens de toutes les relations de surclassements (Figure 3.3), d'effectuer le classement de variantes (≡ classement direct), puis d'inverser l'ordre de classement.
Ainsi, 1er classement sur la base des relations de surclassements Forts du graphe **«inversé»** (Figure 3.4 a):

3 4 5	**2**	**1**

En intégrant les surclassements faibles (Figure 3.4 b) et en inversant ce classement:

Classement INVERSE final

1	**2**	**4**	**3 5**

Classement inverse

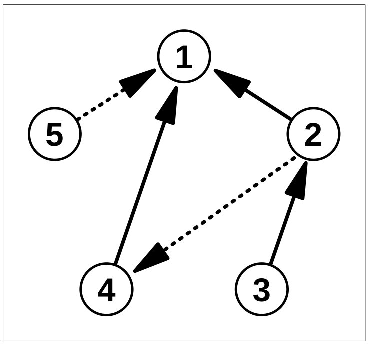


Figure 3.3

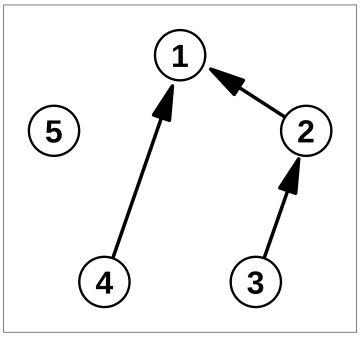


Figure 3.4a

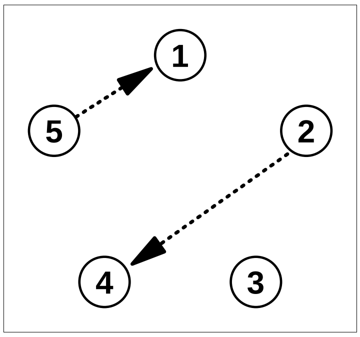


Figure 3.4b

C. Classement MEDIAN

Un troisième classement, le classement médian, est finalement défini comme étant la moyenne arithmétique des rangs des classements DIRECT & INVERSE.
Ce qui est le plus intéressant dans ce type de classement, c'est d'observer les modifications de rangs de certaines variantes entre les classements direct & inverse. Ainsi, un sommet isolé (par exemple la variante 5 en surclassement Fort) est en tête de liste dans le classement direct et en fin de liste dans le classement inverse!

Remarque: les circuits (en surclassements Forts ou faibles), délicats à analyser dans ELECTRE II, sont signalés au décideur par le logiciel «LINAM».

Cette méthode, sans remettre totalement en cause la notion de non transitivité mise en évidence dans ELECTRE I, peut parfois, implicitement, forcer le décideur à une fermeture transitive. De ce point de vue, ELECTRE II est moins rigoureux mathématiquement qu'ELECTRE I, mais permet le classement de variantes!

3.7 VARIANTE AUX CLASSEMENTS DIRECT & INVERSE

«LINAM» offre la possibilité au décideur de choisir une autre procédure de classement dans la mesure où le graphe de surclassements est suffisamment **«riche»** en relations.
Cette approche est basée sur une notion de flux (c.f. par exemple méthode PROMETHEE) incidents et issus (minimisation des flux «entrant» et maximisation des flux «sortant»).
Comme précédemment, ces classements sont établis sur la base des surclassement Forts, les surclassements faibles servant à départager les ex aequo.

A. Minimisation des flux incidents

(flux incidents = nombre de relations «entrant» dans un sommet)

Sur la base du graphe de la Figure 3.1a
Flux «Forts»

Variantes	Flux
1	0
2	1
3	1
4	1
5	0

1er classement:

1 5	2 3 4

En Introduisant les surclassements faibles:
Classement en flux incidents

1	5	3 4	2

B. Maximisation des flux issus

(flux issus = nombre de relations «sortant» d'un sommet)

Sur la base du graphe de la Figure 3.1a
Flux «Forts»

Variantes	Flux
1	2
2	1
3	0
4	0
5	0

1er classement:

1	2	3 4 5

En Introduisant les surclassements faibles:
Classement en flux issus

1	2	4	3 5

Un classement médian peut être également calculé.

Remarque: cette variante, très simple, de classements d'ELECTRE II, doit être considérée avec prudence et appliquée à un graphe de surclassement «riche» en relations «Fortes». Cette approche, qui sera effectuée en complément à la méthode conventionnelle de classements, peut être intéressante dans le cadre de circuits de relations Fortes ou faibles, délicats à analyser en matière de longueur de chemins.

4. ANALYSE DE SENSIBILITE

Plusieurs types d'analyses de sensibilité, permettant de tester la stabilité des solutions, peuvent être effectuées, par exemple sur les seuils de concordance et de discordance (ELECTRE I & II) ou sur les poids des différents critères (rappel: ces derniers devant être impérativement indépendants les uns des autres!).

L'analyse de sensibilité effectuée sur la pondération des critères est essentielle, puisque ce paramètre représente l'aspect «politique» de la décision, l'aspect «technique» étant défini par la matrice des coefficients (matrice d'états). Il est à noter que dans les méthodes ELECTRE I & II, ces deux notions sont distinguées par la double approche en concordance et en discordance.

Le logiciel «LINAM» permet automatiquement et systématiquement, pour toutes méthodes d'analyses multicritères, d'effectuer une analyse de sensibilité sur la pondération des critères, soit sur la base des poids initiaux des critères, soit sur une pondération «fictive» unitaire pour tous les critères (mise en évidence de l'importance d'un critère et de son effet sur la solution finale indépendamment du vecteur poids initial).
De plus, il est possible de regrouper certains critères en ensembles homogènes, et d'effectuer ainsi une analyse de sensibilité par groupes de critères.

Analyse de sensibilité par critère: exemple de procédure

Soit: 6 critères, Pi: le vecteur poids associé (initial ou unitaire) et ***f*** le facteur d'analyse de sensibilité (AS = analyse de sensibilité).

	Vecteur «POIDS»					
Critères	initial 0	AS 1	AS 2	AS 3	…	AS 6
1	P1	***f*** x P1	P1	P1		P1
2	P2	P2	***f*** x P2	P2		P2
3	P3	P3	P3	***f*** x P3		P3
4	P4	P4	P4	P4		P4
5	P5	P5	P5	P5		P5
6	P6	P6	P6	P6		***f*** x P6
ELECTRE I, II, ...	**METHODES D’ANALYSE MULTICRITERE**					
RESULTATS	**R0**	**R1[AS1]**	**R2[AS2]**	**R3[AS3]**	**…**	**R6[AS6]**

Résultats:
- ELECTRE I : variantes du noyau,
- ELECTRE II: classements direct, inverse ou médian.